

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2014/2015
AM210 - Analisi Matematica 3 - Tutorato II

DOCENTE: PROF. GIOVANNI MANCINI

TUTORI: A. MAZZOCCOLI, M. NANNI

Si possono verificare gli esercizi consultando le soluzioni ai tutorati I, IV e V dell'A.A. 2013/2014.

ESERCIZIO 1. Data

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-x}}{x} dx$$

- (1) Determinare l'insieme di definizione di $f(t)$;
- (2) Provare che $f(t)$ è di classe C^1 e calcolarne la derivata;
- (3) Trovare un'espressione per $f(t)$ in cui non compaiono integrali.

ESERCIZIO 2.Data

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2 t^2 + 1)}{t^2 + 1} dt$$

- (1) Provare che $g(x)$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$;
- (2) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ $g(x)$ è continua.

ESERCIZIO 3. Data

$$h(x) = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t^2 x}}{t} dt$$

- (1) Trovare il dominio di $h(x)$
- (2) Provare che $h(x)$ è continua sul suo dominio di definizione.

ESERCIZIO 4. Calcolare:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2} dx \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nx^2 e^{-nx^2}}{1+nx^2} dx$$

ESERCIZIO 5. Data

$$f(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t^3 + t} dt$$

- (1) Provare che $f \in C^1(\mathbb{R})$;
- (2) Calcolare esplicitamente $f'(x)$;
- (3) Trovare un'espressione esplicita per $f(x)$.

ESERCIZIO 6. Provare che $\|x+y\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

ESERCIZIO 7. Provare che $\|\frac{x+y}{2}\|^2 + \|\frac{x-y}{2}\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.